

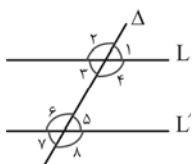
تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد زاویه‌ها

هم‌نهشتی مثلث‌ها

هندسه و استدلال

چند قضیه و تعریف مهم در مورد زاویه‌ها

- ۱ اگر مجموع دو زاویه ۹۰ درجه باشد، آن دو زاویه را متمم گوئیم.
- ۲ اگر مجموع دو زاویه ۱۸۰ درجه باشد، آن دو زاویه را مکمل گوئیم.
- ۳ اگر دو زاویه با هم برابر باشند، متمم‌های آنها با هم و مکمل‌های آنها نیز با هم برابرند.
- ۴ زاویه‌های متقابل به رأس، در هر دو خط متقاطع با هم برابرند.
- ۵ اگر یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کند، تمامی زاویه‌های حاده با هم و تمامی زاویه‌های منفرجه با هم برابرند.

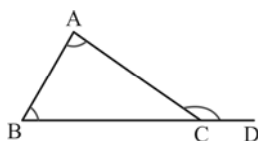


$$\left\{ \begin{array}{l} L \parallel L' \\ \Delta \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = \hat{\beta} \\ \hat{\zeta} = \hat{\epsilon} = \hat{\phi} = \hat{\lambda} \end{array} \right.$$

توجه کنید که عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر خطی دو خط دیگر را قطع کند، بطوری که تمامی زاویه‌های حاده‌ی (یا تمامی زاویه‌های منفرجه‌ی) ایجاد شده با هم برابر باشند، آنگاه آن دو خط با هم موازیند.

۶ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۷ در هر مثلث، هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور به آن.



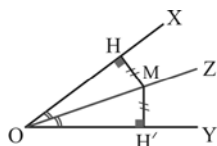
$$\hat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}$$

هم‌نهشتی مثلث‌ها

دو مثلث را هم‌نهشت گوئیم هرگاه دقیقاً برهم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند. اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، تمامی اجزای نظیر در آنها با هم برابر است.

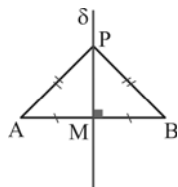
- ۱ دو مثلث در حالات تساوی سه ضلع (ضضض)، تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین (ضضز) و تساوی دو زاویه و ضلع بین (زضز) هم‌نهشت هستند.
- ۲ دو مثلث قائم‌الزاویه علاوه بر حالات فوق در حالات تساوی وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه و همچنین وتر و یک زاویه‌ی حاده با هم هم‌نهشت هستند.

با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها، می‌توان دو قضیه‌ی مهم زیر را اثبات کرد:



- ۱ هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل اگر OZ نیمساز زاویه‌ی XOY و M نقطه‌ی واقع بر آن باشد، آنگاه  $MH = MH'$ .

عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه، به یک فاصله باشد، آنگاه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



- ۲ هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

یعنی در شکل مقابل اگر  $\delta$ ، عمود منصف پاره‌خط AB و P نقطه‌ای واقع بر آن باشد، آنگاه  $PA = PB$ .

عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آنگاه روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد.



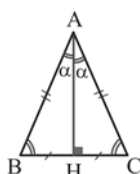
### مثلث متساوی الساقین

مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، متساوی الساقین نامیده می شود. هر کدام از دو ضلع مساوی با هم را ساق و ضلع دیگر را قاعده می نامیم.

۱ در مثلث متساوی الساقین، زاویه های روبرو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.

۲ عکس قضیه ی (۱) نیز صحیح است، یعنی اگر در مثلثی دو زاویه ی مساوی وجود داشته باشد، آن مثلث متساوی الساقین است (اضلاع روبرو به زاویه های مساوی آن با هم برابرند).

۳ در مثلث متساوی الساقین، نیمساز، ارتفاع و میانه ی وارد بر قاعده، بر هم منطبقند.



۴ در مثلث متساوی الساقین ABC (AB = AC) روابط زیر برقرار است:

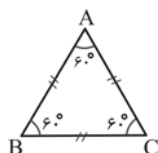
$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} \quad \text{زوایای مجاور به ساق}$$

$$\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \quad \text{زاویه ی روبه رو به قاعده}$$

### مثلث متساوی الاضلاع

مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند، متساوی الاضلاع نامیده می شود. زاویه های مثلث متساوی الاضلاع، هر سه با هم برابرند و اندازه ی آنها ۶۰ درجه است.

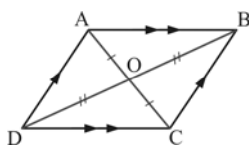
همچنین اگر هر سه زاویه ی مثلثی با هم برابر بودند، می توان نتیجه گرفت که آن مثلث متساوی الاضلاع است، یعنی هر سه ضلع آن مثلث با هم برابرند.



### متوازی الاضلاع

یک متوازی الاضلاع چهارضلعی است که ضلع های آن دو به دو با هم موازی هستند. از موازی بودن دو به دو اضلاع، نتیجه می شود که در متوازی الاضلاع:

- ۱ ضلع های روبرو با هم مساویند.
- ۲ زاویه های روبرو با هم مساویند.
- ۳ زاویه های مجاور با هم مکملند.
- ۴ قطر ها همدیگر را نصف می کنند.



$$OA = OC \text{ و } OB = OD$$

۵ با رسم هر قطر، متوازی الاضلاع به دو مثلث همنهشت تقسیم می شود.

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ و } \triangle ACD \cong \triangle CBA$$

۶ با رسم دو قطر، متوازی الاضلاع به چهار مثلث تقسیم می شود.

$$\triangle OAB \cong \triangle OCD \text{ و } \triangle OAD \cong \triangle OCB$$

۷ مستطیل: متوازی الاضلاعی است که زاویه های آن با هم مساوی باشند (هر چهار زاویه ۹۰ درجه هستند). از تعریف فوق، می توان نتیجه گرفت که در مستطیل، طول قطر ها با هم برابر است.

۸ لوزی: متوازی الاضلاعی است که ضلع های آن با هم مساوی باشند. از تعریف فوق، می توان نتیجه گرفت که در لوزی، قطر ها بر هم عمود بوده و همچنین نیمساز زاویه های لوزی هستند.

تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد خم‌ها

چندضلعی‌ها

هندسه و استدلال

تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد خم‌ها

- ۱) خم مسطح: مجموعه‌ای از نقطه‌هاست که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ، رسم کنیم.
- ۲) خم ساده: یک خم مسطح است که هیچ یک از نقطه‌های خود را قطع نکند، مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند.
- ۳) خم بسته: اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود.
- ۴) قضیه‌ی خم جردن: هر خم ساده‌ی بسته C، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.
- ۵) اگر همه‌ی زاویه‌های داخلی یک چندضلعی کمتر از  $180^\circ$  درجه باشند، ناحیه‌ی داخل آن چندضلعی محدب است و اگر در یک چندضلعی حداقل یک زاویه‌ی بیشتر از  $180^\circ$  درجه وجود داشته باشد، ناحیه‌ی داخل آن چندضلعی محدب نیست.
- ۶) یک ناحیه (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) محدب است اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً در آن ناحیه قرار گیرد.

چندضلعی‌ها

- ۱) چندضلعی: یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد، به طوری که نقطه‌های انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آنها روی یک خط قرار نگرفته باشند.
- ۲) تعداد قطرهای هر n ضلعی برابر  $\frac{n(n-3)}{2}$  است.
- ۳) مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب، برابر  $(n-2) \times 180^\circ$  است، پس هر زاویه‌ی داخلی یک n ضلعی منتظم  $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$  است.
- ۴) مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب،  $360^\circ$  درجه است.

مساحت مثلث

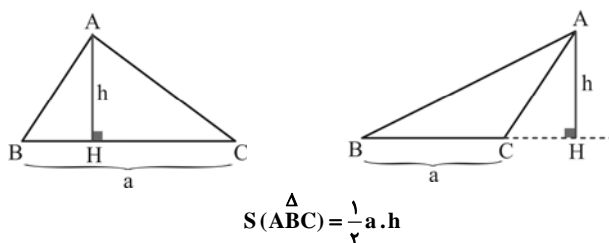
مساحت چندضلعی‌ها

مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس

مساحت مثلث

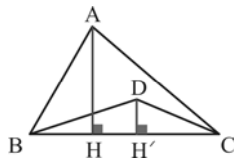
مساحت مثلث قائم‌الزاویه: مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن.

مساحت مثلث در حالت کلی: مساحت هر مثلث دلخواه، برابر است با نصف حاصلضرب یک ضلع آن، در ارتفاع وارد بر آن.



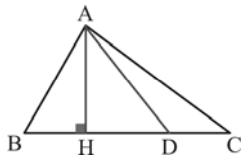
از نکته‌ی اخیر، می‌توان به سه نتیجه‌ی مهم رسید:

❖ نتیجه‌ی ۱: اگر دو مثلث دارای یک قاعده‌ی برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها، برابر است با نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن قاعده‌ی مشترک. پس در شکل روبرو، داریم:



$$\frac{S(ABC)}{S(DBC)} = \frac{AH}{DH'}$$

❖ **نتیجه ۲:** اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها، برابر است با نسبت قاعده‌ی نظیر آن ارتفاع مشترک.  
پس در شکل روبرو، داریم:



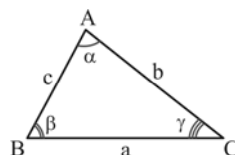
$$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle ABD)} = \frac{BC}{BD} \quad \text{و} \quad \frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle ACD)} = \frac{BC}{CD} \quad \text{و} \quad \frac{S(\triangle ABD)}{S(\triangle ACD)} = \frac{BD}{CD}$$

❖ **نتیجه ۳:** از قسمت قبل، می‌توان نتیجه گرفت که میانه‌ی هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.  
پس در شکل روبرو، داریم:



$$S(\triangle ABM) = S(\triangle ACM) = \frac{1}{2} S(\triangle ABC)$$

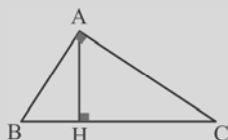
فرمول دیگری برای محاسبه‌ی مساحت مثلث در حالت کلی: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.  
پس در شکل روبرو داریم:



$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

**نکته**

در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصلضرب وتر، در ارتفاع وارد بر آن، برابر است با حاصلضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه، زیرا:



$$\begin{cases} 2S(\triangle ABC) = AH \times BC \\ 2S(\triangle ABC) = AB \times AC \end{cases} \Rightarrow \boxed{AH \times BC = AB \times AC}$$

#### مساحت چهارضلعی‌ها

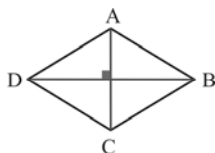
**مساحت مربع:** مساحت هر مربع، برابر است با مربع طول ضلع آن.

**مساحت مستطیل:** مساحت هر مستطیل، برابر است با حاصلضرب طول در عرض آن.

**مساحت متوازی‌الاضلاع:** مساحت هر متوازی‌الاضلاع، برابر است با حاصلضرب یک ضلع در ارتفاع نظیر آن ضلع.

**مساحت لوزی:** مساحت هر لوزی، برابر است با نصف حاصلضرب قطرهای آن.

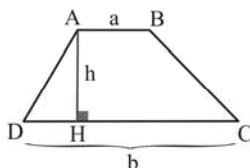
پس اگر در شکل مقابل در نظر بگیریم  $AC = d$  و  $BD = d'$ ، آنگاه:



$$S(ABCD) = \frac{1}{2} d \cdot d'$$

**مساحت دوزنقه:** مساحت هر دوزنقه، برابر است با نصف حاصلضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع آن.

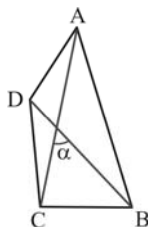
پس در شکل مقابل، داریم:



$$S(ABCD) = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$$

**مساحت چهارضلعی‌های محدب در حالت کلی:** در حالت کلی، مساحت هر چهارضلعی محدب، برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر آن، در سینوس زاویه‌ی بین آن دو قطر.

پس اگر در شکل روبرو، در نظر بگیریم  $AC = d$  و  $BD = d'$ ، داریم:



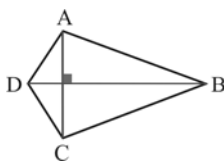
$$S(ABCD) = \frac{1}{2} d \cdot d' \cdot \sin \alpha$$

از نکته‌ی اخیر، می‌توان به یک نتیجه‌ی مهم رسید:

❖ نتیجه: مساحت هر چهارضلعی محدبی که قطرهای آن بر هم عمودند، برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر.

پس اگر در شکل روبرو در نظر بگیریم  $AC = d$  و  $BD = d'$ ، داریم:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} d \cdot d'$$



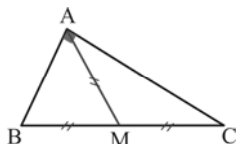
#### چند قضیه‌ی مهم در مثلث‌های قائم‌الزاویه

#### مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس

چند قضیه‌ی مهم در مثلث‌های قائم‌الزاویه

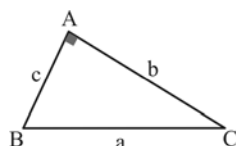
قضیه‌ی ۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر، نصف طول وتر است.

پس در شکل روبرو داریم  $AM = \frac{1}{2} BC$ ، یا به بیان دیگر  $AM = BM = CM$ .



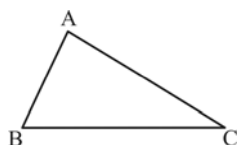
قضیه‌ی ۲ (قضیه‌ی فیثاغورس)- در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول بزرگترین ضلع (ضلع روبرو به زاویه‌ی قائمه) برابر است با مجموع مربعات طول‌های دو ضلع دیگر.

پس در شکل روبرو داریم:  $a^2 = b^2 + c^2$ .



قضیه‌ی ۳ (عکس قضیه‌ی فیثاغورس)- اگر در مثلث ABC، رابطه‌ی  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  بین اضلاع برقرار باشد، زاویه‌ی A، قائمه است.

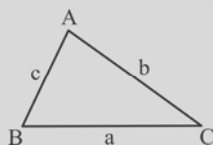
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



#### نکته

طبق قضیه‌ی فیثاغورس اگر مربع طول یک ضلع از مثلثی، برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، زاویه‌ی روبرو به آن ضلع، قائمه است.

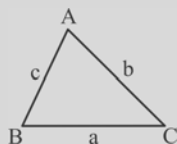
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



دو حالت زیر را نیز می‌توان در نظر گرفت:

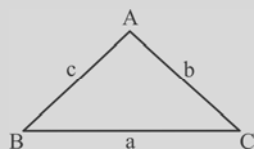
① اگر مربع طول یک ضلع از مثلثی، کمتر از مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، زاویه‌ی روبرو به آن ضلع، کمتر از قائمه (حاده) است.

$$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$



② اگر مربع طول یک ضلع از مثلثی، بیشتر از مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، زاویه‌ی روبرو به آن ضلع، بیشتر از قائمه (منفرجه) است.

$$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$



خواص برخی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی خاص

مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس

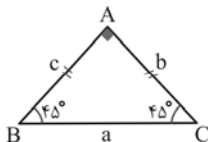
خواص ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه

خواص برخی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی خاص

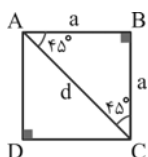
مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی حاده‌ی ۴۵ درجه: اینگونه مثلث‌ها، هم قائم‌الزاویه هستند و هم متساوی‌الساقین و

در آنها طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه با هم برابر و هر دو  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  برابر طول وتر هستند یا به بیان دیگر، طول وترآنها  $\sqrt{2}$  برابر طول هر ضلع زاویه‌ی قائمه است.

پس در شکل بالا، روابط زیر برقرار است:



$$\begin{cases} b = c = \frac{\sqrt{2}}{2} a \\ a = \sqrt{2} b = \sqrt{2} c \end{cases}$$



&lt; تذکره: چون با رسم هر قطر مربع، آن مربع به دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین تقسیم می‌شود،

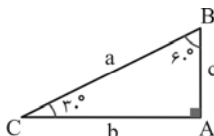
پس طول قطر مربعی به طول ضلع 'a' برابر است با  $d = \sqrt{2} a$ ؛ یا به بیان دیگر، طول ضلع مربعی به طولقطر 'd' برابر است با  $a = \frac{\sqrt{2}}{2} d$ .

مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی حاده‌ی ۳۰ درجه: زاویه‌ی دیگر این مثلث‌ها ۶۰ درجه است و در آنها:

۱- ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه (مجاور زاویه‌ی ۶۰ درجه)، نصف وتر است.

۲- ضلع روبرو به زاویه‌ی ۶۰ درجه (مجاور زاویه‌ی ۳۰ درجه)،  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  برابر وتر است.۳- ضلع روبرو به زاویه‌ی ۶۰ درجه،  $\sqrt{3}$  برابر طول ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه است.

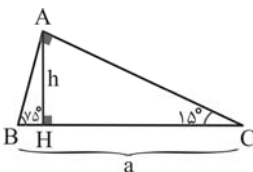
پس در شکل بالا، روابط زیر برقرار است:



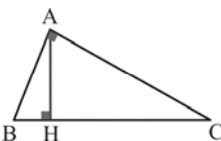
$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} a, b = \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ b = \sqrt{3} c \end{cases}$$

مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی حاده‌ی ۱۵ درجه: زاویه‌ی دیگر این مثلث‌ها ۷۵ درجه است. در

اینگونه مثلث‌ها، طول ارتفاع وارد بر وتر، یک چهارم طول وتر است.

پس در شکل مقابل، داریم:  $h = \frac{1}{4} a$ .

خواص ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه

اگر مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC،  $\hat{A} = 90^\circ$  و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، آنگاه سه رابطه‌ی زیر برقرار است:

۱  $AH^2 = BH \times CH$

۲  $AB^2 = BH \times BC$

۳  $AC^2 = CH \times BC$

## محاسبه‌ی طول ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الساقین برحسب اضلاع آن

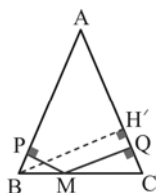
## مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس

## محاسبه‌ی طول ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الساقین برحسب اضلاع آن

برای محاسبه‌ی طول ارتفاع وارد بر قاعده، می‌دانیم که ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد. با توجه به این موضوع و قضیه‌ی فیثاغورس می‌توان ارتفاع را تعیین کرد. برای محاسبه‌ی ارتفاع وارد بر ساق، کافی است مساحت مثلث را از دو طریق «قاعده و ارتفاع وارد بر آن» و «ساق و ارتفاع وارد بر آن» به‌دست آورد و آنها را مساوی هم قرار دهیم.

❖ تذکره ۱: مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر با ارتفاع وارد بر ساق است.

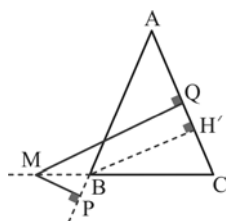
پس در شکل مقابل، داریم:



$$MP + MQ = BH'$$

❖ تذکره ۲: قدر مطلق تفاضل هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر با ارتفاع وارد بر ساق است.

پس در شکل مقابل، داریم:



$$|MQ - MP| = BH'$$

ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع

ویژگی‌های شش ضلعی منتظم

هشت ضلعی منتظم محاط در مربع

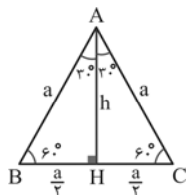
مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس

## ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع

با رسم هر کدام از ارتفاع‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع، آن مثلث، به دو مثلث قائم‌الزاویه مساوی با زاویه‌ی حاده‌ی ۳۰ درجه تقسیم می‌شود. اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را  $a$  در نظر بگیریم، آنگاه:

۱ طول ارتفاع این مثلث، برابر با  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  است.

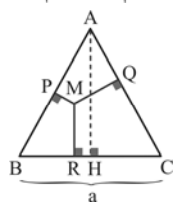
۲ مساحت این مثلث، برابر با  $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  است.



❖ تذکره ۱: مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع مثلث، برابر با ارتفاع مثلث است.

پس در شکل مقابل داریم:

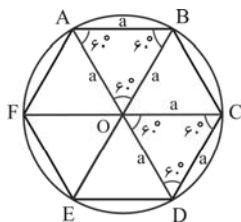
$$MP + MQ + MR = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



## ویژگی‌های شش ضلعی منتظم

۱ اگر مرکز دایره‌ی گذرنده از رأس‌های شش ضلعی منتظم را به رأس‌های آن وصل کنیم، شش مثلث متساوی‌الاضلاع مساوی ایجاد می‌شود، پس مساحت شش ضلعی منتظم به‌طول

ضلع  $a$ ، برابر  $S = 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$  است.

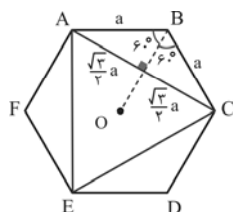


۲ هر یک از زاویه‌های داخلی شش ضلعی منتظم، ۱۲۰ درجه است.

۳ طول قطرهای بزرگ شش ضلعی منتظم به‌طول ضلع  $a$  (AD، BE، CF در شکل بالا) برابر با  $2a$  است.

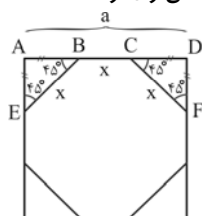
۴ طول قطرهای کوچک شش ضلعی منتظم به‌طول ضلع  $a$  (AC، CE، EA در شکل

روبرو) برابر  $\sqrt{3}a$  است.



## هشت ضلعی منتظم محاط در مربع

مطابق شکل، اگر رأس‌های یک هشت ضلعی منتظم به طول ضلع  $x$  روی محیط مربعی به طول ضلع  $a$  قرار داشته باشند، می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} AB = CD = \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ AD = AB + BC + CD \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}x + x + \frac{\sqrt{2}}{2}x \Rightarrow a = (\sqrt{2} + 1)x \\ \text{یا} \\ x = (\sqrt{2} - 1)a \end{cases}$$

نسبت و تناسب

قضیه تالس و نتیجه‌های آن

تشابه

تشابه

## نسبت و تناسب

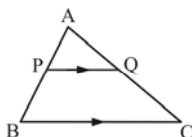
تساوی بین دو نسبت، تناسب نامیده می‌شود، از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، می‌توان به نتایج زیر که کاربرد زیادی در حل مسائل این قسمت دارند، رسید:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \text{۱) } ad = bc \\ \text{۲) } \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{۳) } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \text{۴) } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c} \end{cases}$$

$$\text{اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{، آنگاه } \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$$

در تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ،  $b$  میانگین (واسطه‌ی) هندسی دو جمله‌ی کناری  $a$  و  $c$  نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی  $b^2 = ac$  به دست می‌آید.

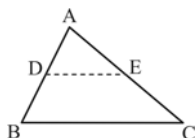
## قضیه تالس



اگر خطی که موازی با یکی از ضلع‌های یک مثلث است، دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند. پس در شکل مقابل، چون  $PQ \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

## نتیجه‌های مهم قضیه تالس

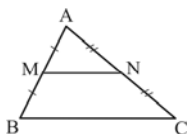
❖ **نتیجه ۱ (عکس قضیه تالس):** اگر در مثلث  $ABC$ ، دو نقطه‌ی  $D$  و  $E$  به ترتیب روی دو ضلع  $AB$  و  $AC$ ، طوری انتخاب شوند که  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ، آنگاه  $DE \parallel BC$ .



❖ **نتیجه ۲:** با توجه به شکل بالا که در آن  $DE \parallel BC$ ، می‌توان نوشت:

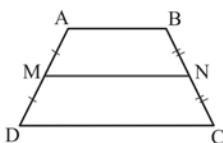
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

❖ **نتیجه ۳:** اگر وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی حاصل می‌شود که با ضلع سوم موازی است و طول آن، نصف طول ضلع سوم است.



پس در شکل مقابل اگر  $AM = BM$  و  $AN = NC$ ، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که  $MN \parallel BC$  و  $MN = \frac{1}{2}BC$ .

❖ **نتیجه ۴:** در هر دوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند، با قاعده‌ها موازی بوده و طول آن برابر با میانگین طول قاعده‌هاست.



پس در شکل روبرو، اگر  $M$  و  $N$  وسط‌های ساق‌های دوزنقه‌ی  $ABCD$  باشند، آنگاه  $MN \parallel AB, CD$  و

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$



### تعریف تشابه در حالت کلی

دو چندضلعی را زمانی متشابه گویند که در آنها زاویه‌های نظیر با هم برابر بوده و اضلاع نظیر با هم متناسب باشند. به نسبت اضلاع نظیر در دو چندضلعی متشابه، نسبت تشابه گفته و معمولاً آن را با  $k$  نشان می‌دهند.

### حالت‌های تشابه دو مثلث

دو مثلث در سه حالت با هم متشابهند:

- حالت ۱ **تساوی زاویه‌ها:** اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابهند.
  - حالت ۲ **تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین:** اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آن دو مثلث متشابهند.
  - حالت ۳ **تناسب سه ضلع:** اگر سه ضلع از یک مثلث، با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابهند.
- پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه**  
در هر دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌های متناظر، برابر نسبت تشابه است.

### نسبت محیط‌ها و مساحت‌ها در دو چندضلعی متشابه

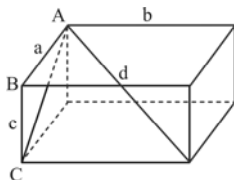
- ۱ در هر دو چندضلعی متشابه (در نتیجه، دو مثلث متشابه)، نسبت محیط‌ها، برابر با نسبت تشابه است.
- ۲ در هر دو چندضلعی متشابه (در نتیجه، دو مثلث متشابه)، نسبت مساحت‌ها، برابر با مجذور نسبت تشابه است.



**تعریف چند وجهی:** بخشی از فضا که از همه طرف محدود به صفحه است، شکلی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی گویند.

### مکعب مستطیل

یک شش وجهی است که همه‌ی وجه‌های آن مستطیل هستند. وجه‌های روبرو در مکعب مستطیل، مستطیل‌های موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یال‌های آن بر وجه‌ها عمود هستند، مکعب مستطیل ۸ رأس و ۱۲ یال دارد. در هر مکعب مستطیل، پاره‌خطی که دو رأس متقابل (دو رأس که در یک وجه قرار ندارند) را به هم وصل می‌کند، قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود.

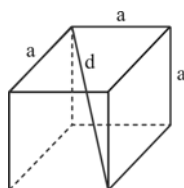


- ۱ حجم مکعب مستطیل :  $V = abc$
- ۲ طول قطر مکعب مستطیل :  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- ۳ مساحت کل مکعب مستطیل :  $S = 2(ab + bc + ca)$

برای به‌دست آوردن طول قطر هر وجه مکعب مستطیل از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کنید مثلاً در شکل بالا برای به‌دست آوردن طول  $AC$  که قطر یکی از وجه‌های مکعب مستطیل است، با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $ABC$ ، داریم:  $AC = \sqrt{a^2 + c^2}$ .

### مکعب

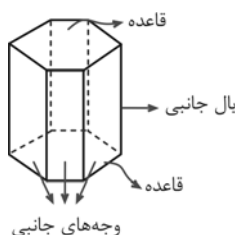
مکعب مستطیلی است که طول همه‌ی یال‌های آن با هم برابر است.



- ۱ حجم هر مکعب به‌طول یال  $a$ ، برابر  $V = a^3$  است.
- ۲ طول قطر هر کدام از وجه‌های مکعب به طول یال  $a$ ، برابر  $\sqrt{2}a$  است.
- ۳ طول هر قطر مکعب به طول یال  $a$  برابر  $d = \sqrt{3}a$  است.
- ۴ مساحت کل هر مکعب به طول یال  $a$  برابر  $6a^2$  و مساحت جانبی آن  $4a^2$  است.

### منشور

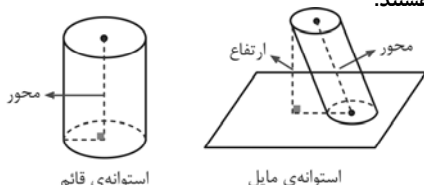
یک چندوجهی است که دو وجه آن هم‌نهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند.



- ۱ ارتفاع منشور، پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.
- ۲ اگر پال‌های جانبی، بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک منشور قائم و در غیر این صورت آن را منشور مایل می‌نامند.
- ۳ مساحت جانبی هر منشور قائم، برابر است با محیط قاعده ضربدر ارتفاع.
- ۴ مساحت کل منشور برابر است با مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده.
- ۵ حجم هر منشور برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع.

#### استوانه

شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چند ضلعی، دو دایره‌ی هم‌نهشت هستند.



- ۱ در استوانه‌ی قائم، محور استوانه (پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را با هم وصل می‌کند) همان ارتفاع منشور است.
- ۲ مساحت جانبی هر استوانه‌ی قائم به شعاع قاعده‌ی  $R$  و ارتفاع  $h$ ، برابر  $2\pi R h$  است.

- ۳ مساحت کل هر استوانه برابر مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده است، یعنی مساحت کل هر استوانه‌ی قائم به شعاع قاعده‌ی  $R$  و ارتفاع  $h$  برابر  $2\pi R(h + R)$  است.
- ۴ حجم هر استوانه به شعاع قاعده‌ی  $R$  و ارتفاع  $h$  برابر  $V = \pi R^2 h$  است.

#### اصل کاوالیری

##### ۱- اصل کاوالیری در مورد مسامت‌ها

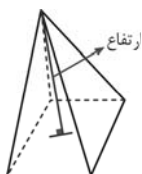
فرض می‌کنیم قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند. اگر هر خطی به موازات قاعده‌های دو شکل در آنها قطعاتی با طول‌های مساوی ایجاد کند، آنگاه مساحت‌های دو شکل با هم مساوی است.

##### ۲- اصل کاوالیری در مورد مجسم‌ها

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل، دارای مساحت برابر باشند، آنگاه حجم‌های این دو شکل فضایی برابر با هم برابر است.

#### هرم

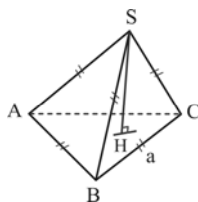
یک چندوجهی است که همه‌ی وجه‌های آن به جز یکی در یک رأس مشترک‌اند.



- ۱ (ارتفاع هرم) پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.
- ۲ اگر قاعده‌ی یک هرم چندضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، آن را هرم منتظم می‌نامیم.

- ۳ حجم هرمی به مساحت قاعده‌ی  $S$  و ارتفاع  $h$  برابر  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$  است.

- ۴ هرم منتظم مثلث‌القاعده‌ای که هر چهار وجه آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم‌نهشت باشند، چهار وجهی منتظم نامیده می‌شود. طول ارتفاع چهار وجهی منتظم به طول پال  $a$ ، برابر با  $\frac{\sqrt{6}}{3} a$  است.



$$SH = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

#### مخروط

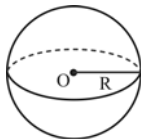
شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به جای چندضلعی، دایره است.



- ۱ پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره قاعده وصل می‌کند، محور مخروط نام دارد. اگر محور بر صفحه‌ی قاعده عمود باشد، مخروط قائم و در غیر این صورت مایل نامیده می‌شود.

- ۲ حجم یک مخروط به شعاع قاعده‌ی  $R$  و ارتفاع  $h$  برابر  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$  است.

مجموعه نقاطی از فضا است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز، به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت شعاع کره نامیده می‌شود.



۱ حجم کره‌ای به شعاع  $R$  برابر  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  است.

۲ مساحت کره‌ای به شعاع  $R$  برابر  $S = 4\pi R^2$  است.